

REFINAMENTO ADAPTATIVO DE SHEWCHUK. Danillo Roberto Pereira, Marco Antônio Piteri. – Exatas – Ciência da Computação – Departamento de Matemática, Estatística e Computação – Faculdade de Ciência e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente.

É de conhecimento geral que o Método de Elementos Finitos (**MEF**) é uma poderosa técnica na obtenção de soluções numéricas de problemas modelados por meio de Equações Diferenciais Parciais oriundos de diferentes áreas do conhecimento humano. Para sua efetiva aplicação, o **MEF** exige *a priori* uma discretização da geometria que define o domínio de interesse do problema. Também é fato que a posição e o tamanho dos elementos finitos associados a essa decomposição condicionam a precisão da solução final obtida pelo método. Uma alternativa seria trabalhar com uma malha uniforme no interior do domínio, mas isto não é em geral suficiente para se encontrar uma boa solução, manter a malha uniforme reduzindo o tamanho dos elementos, leva a obtenção de uma solução mais precisa, porém adiciona enormes custos no tempo de processamento.

Diferentes abordagens têm aparecido na literatura com o propósito de minimizar os possíveis erros derivados do processo de discretização. Aqui, estaremos abordando a estratégia apresentada por Shewchuk (2002), que visa aumentar a regularidade da malha inserindo um número mínimo de elementos em regiões específicas do domínio. Essa estratégia de refinamento adaptativo opera sobre malhas triangulares já existentes satisfazendo o critério de Delaunay (a circunferência que circunscreve cada elemento triangular não pode conter nenhum outro ponto da triangulação) e preserva esta propriedade a cada inserção de um novo elemento, pertencendo assim a uma classe de refinamentos comumente referenciada na literatura por Refinamentos Adaptativos de Delaunay.

Levando em consideração que a abordagem proposta por Shewchuk é uma evolução de duas estratégias anteriores, iremos descrevê-las sucintamente, lembrando que a idéia fundamental associado ao refinamento de Delaunay é a inserção de um vértice no circuncentro de um elemento irregular (baixa qualidade) e sua conseqüente divisão em três novos elementos triangulares. Esta ação é conhecida por *splitting* e é importante observar que após a inserção do novo vértice é necessário preservar o critério de Delaunay. Isto pode ser realizado através do princípio apresentado por Lawson (1977), ver Figura 1.

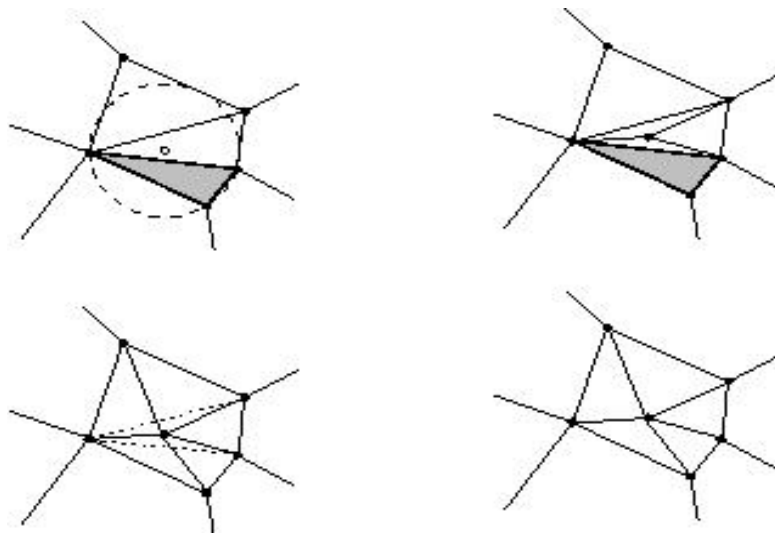


Figura 1: Ilustração do processo de *splitting* do elemento irregular em destaque, que na figura abaixo a direita foi removido.

A primeira estratégia de refinamento adaptativo de Delaunay foi proposta por Chew (1989), limitando-se a inserir um novo vértice no circuncentro de todo elemento cujo raio do circuncírculo seja maior que o tamanho da menor aresta da triangulação, gerando assim uma malha uniforme. Além disso, garante que os ângulos de todos os elementos triangulares estão acima de 30° .

Por outro lado, a estratégia de Ruppert (1995) é um pouco mais complexa que a anterior e a inserção dos vértices obedecem a duas regras:

- Qualquer elemento triangular de baixa qualidade deve ser removido através da inserção de um novo vértice no centro de seu circuncírculo (*splitting*);
- Todo segmento que possui um vértice da triangulação no interior do menor círculo que o contém, deve ser subdividido através da inserção de um novo vértice em seu ponto médio. Este segmento é chamado de *segmento invadido*, ver Figura 2.

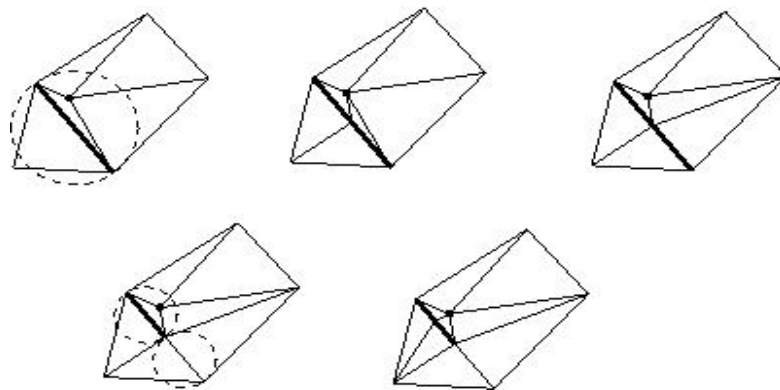


Figura 2: Ilustração do processo de refinamento através da remoção dos segmentos invadidos.

Uma característica importante das malhas refinadas pelo algoritmo de Ruppert é que elas possuem elementos com diferentes tamanhos ao longo do domínio e com transições suaves entre eles, além de garantir ângulos com no mínimo 20.7° . Um exemplo de uma malha refinada pelo critério de Ruppert pode ser visualizado na Figura 3, onde podem ser observadas as características citadas.

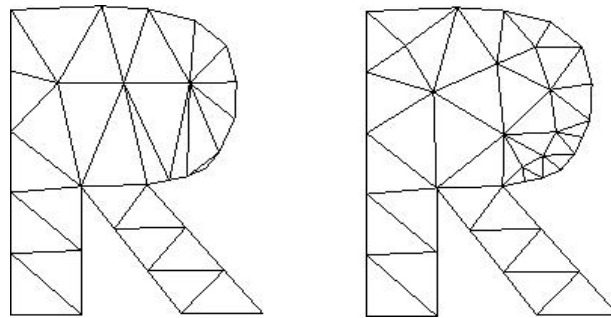


Figura 3: Do lado esquerdo temos a malha inicial e do lado direito à malha refinada pelo algoritmo de Ruppert.

Um dos problemas da abordagem elaborada por Ruppert ocorre quando a geometria de entrada possui ângulos inferiores a 45° . Esse problema foi mapeado por Shewchuk (2002), que fornece exemplo em que pode não ocorrer convergência do processo de refinamento. Com o intuito de solucionar esta falha, Ruppert pensou inicialmente em usar uma idéia proposta por Bern (1995), denominada *corner looping*, mas a considerou relativamente complexa do ponto de vista computacional, além disso, um número excessivo de novos elementos era criado desnecessariamente. Nesse sentido, concebeu sua própria estratégia para remoção de ângulos pequenos, que é baseada na idéia de círculos concêntricos criados em torno dos vértices de entrada.

Esses círculos possuem raio que são potencia de 2 e quando for necessário subdividir algum segmento invadido, ao invés de inserir um novo vértice no ponto médio desse segmento, insere-se um novo vértice no ponto de intersecção entre o segmento e o círculo concêntrico mais próximo de seu

ponto médio, ou seja, quando um segmento é invadido, ao invés de escolhermos os pontos médios associados aos segmentos, optamos pela intersecção destes com o círculo mais próximo. A Figura 4 ilustra uma representação diagramática desta descrição.

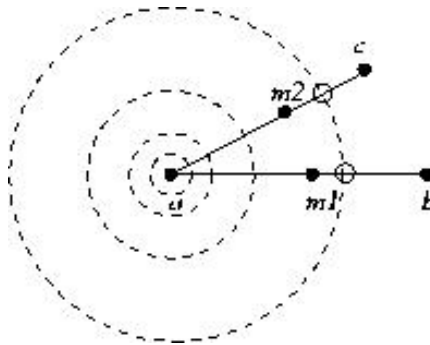


Figura 4: Ilustração da idéia de círculos concêntricos criada por Ruppert.

Finalmente, chegamos à estratégia proposta por Shewchuk (2002) que aproveita a idéia anterior de círculos concêntricos. A diferença fundamental dessa proposta está no tratamento que é dado ao segmento invadido s pelo circuncírculo de um elemento de baixa qualidade. Ao invés de rejeitar a inserção e subdividir os segmentos invadidos, do mesmo modo que Ruppert; Shewchuk criou um processo de decisão mais elaborado, onde algumas condições são verificadas para se garantir efetivamente a subdivisão de s , ou não. Essas condições encontram-se listadas abaixo.

- Se nenhum dos vértices que definem s possuírem ângulos inferiores a 60° , ou se ambos possuírem, então s é subdividido;
- Caso contrário, seja a o menor ângulo entre duas arestas consecutivas (sentido anti-horário) incidentes a um dos vértices que determinam s . Vamos referenciar esse vértice por v . Neste caso, devemos criar um *cluster* de segmentos que será composto por todos os segmentos incidentes a v e que se encontram separados de s ou de algum outro segmento do *cluster* por menos de 60° , ver Figura 5.

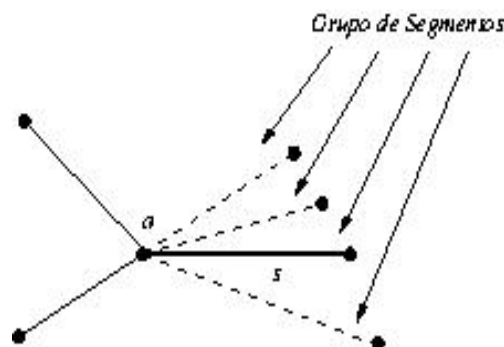


Figura 5: Ilustração de um grupo (*cluster*) de segmentos associados a um vértice.

Após a definição do *cluster* de segmentos, o segmento invadido s será subdividido, se e somente se, pelo menos duas das seguintes situações forem verdadeiras:

- Primeiramente devemos dividir todos os segmentos do *cluster* que possuírem tamanho superior a $|s|$ com a inserção de um novo vértice em seu ponto médio. Se algum desses novos segmentos possuírem tamanho inferior a algum segmento incidente ao vértice que ocasionou a inserção de v , então s é subdividido;

- Se algum segmento do *cluster* possuir tamanho que não seja potência de 2 (com certa tolerância), então s deve ser subdividido.

Por fim, na Figura 6 é possível observar duas malhas. A malha à esquerda é a inicial, enquanto a malha à direita passou pelo processo de refinamento de Shewchuk. Visualmente é perceptível a maior qualidade na malha refinada (direita), em que há uma maior regularidade de seus elementos, ou seja, os elementos estão mais próximos do elemento ideal (triângulo equilátero), comparativamente a malha inicial. Por outro lado, verifica-se que houve um número reduzido de inserção de novos vértices e estes estão concentrados em regiões específicas do domínio.

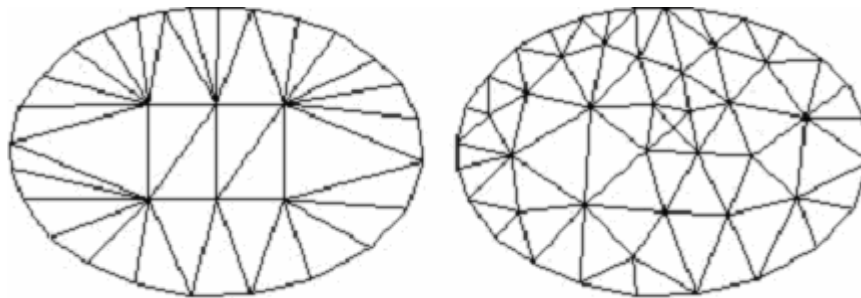


Figura 6: Exemplo de uma malha inicial (esquerda) e a mesma malha refinada pela abordagem de Shewchuk (direita).

Em síntese, este trabalho apresenta sumariamente a descrição das principais abordagens algorítmicas associadas à temática de *refinamentos adaptativos de Delaunay*, que, sob a perspectiva de uma malha de elementos finitos é um dos principais paradigmas existentes para minimizar os possíveis erros que ocorrem num processo de *Análise* através do **MEF** em função da etapa anterior de discretização da geometria do domínio. Estas técnicas de refinamento podem ser igualmente usadas, com pequenas modificações em outros problemas envolvendo triangulação de pontos, como por exemplo: *Modelagem Digital de Terrenos* e *Reconstrução de Superfícies*.

Referências Bibliográficas

- BERN, M.; EPPSTEIN, D. Mesh Generation and Optimal Triangulation. In: Du, D.Z.; Hwang, F. **Computing in Euclidean Geometry**. 2 ed. Singapura: World Scientific, 1995. p. 47-111.
- CHEW, L.P. **Guaranteed-quality triangular meshes**. 1989. 20 f. Relatório Técnico (Ciência da Computação) - Computer Science Department, Cornell University, 1989.
- LAWSON, C.L. Software for C Surface Interpolation. In: Rice, J.R. **Mathematical Software III**. New York: Academic Press, 1977. p. 161-194.
- RUPPERT, J. A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. **Journal of Algorithms**, San Diego, v. 18, n. 3, p. 548-585, mai. 1995.
- SHEWCHUK, J.R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. **Computational Geometry: Theory and Applications**, v. 22, n. 1-3, p. 21-74, mai. 2002.

Bolsa: FAPESP